به نام زندگی

آنالیز ترکیبی

* ترکیب تعمیم یافته

در ترکیب تعمیم یافته، می خواهیم $n$ شی را به $k$ گروه دسته بندی کنیم

به طوری که در گروه اول $m_1$ عضو، در گروه دوم $m_2$ عضو، ... و گروه $k$ ام

$m_r$ عنصر حضور داشته باشند

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = \sum_{i=1}^{r} m_i = N$$

در این صورت تعداد حالت‌های ممکن با ترکیب تعمیم یافته، به صورت زیر به
دست می‌آید

$$\binom{N}{m_1, m_2, \dots, m_r} = C^{N}_{m_1, \dots, m_r} = \frac{N!}{m_1!\, m_2! \dots m_r!}$$

* از نظر ریاضی بین ترکیب تقسیم‌بندی و بسط چندجمله‌ای‌ها ارتباط وجود دارد.

می‌دانیم که

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^N = \sum \binom{N}{m_1, \ldots, m_r} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_r^{m_r}$$

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = N$$

مثال ۱: یک سکه را 5 بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این پیش‌آمد را حساب کنید که دست‌کم 3 بار شیر بیاید.

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

$N_A$ : تعداد حالت‌های مورد نظر

$N$ : کل تعداد حالت‌های ممکن

$|\Omega|$

$$\Omega = \overbrace{\{H,T\} \times \cdots \times \{H,T\}}^{\text{5 بار}} \longrightarrow |\Omega| = 2^5 = N$$

$$N_A = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

چهار بار شیر بیاید

تعداد حالتهایی که

سه بار شیر بیاید

5 بار شیر بیاید

$$( \_ , \_ , \_ , \_ , \_ )$$

$$\Rightarrow \quad P(A) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}}{2^5}$$

مثال: فرض کنیم می‌خواهیم $m$ توپ را در $n$ جعبه قرار دهیم، $n \geq m$

احتمال این پیش‌آمد را حساب کنید که $m$ توپ در $m$ جعبه مورد نظر ما قرار بگیرد. با شرط اینکه در هر جعبه فقط یک توپ قرار داشته باشد.

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

$N_A$: تعداد حالت‌های مورد نظر $= 1$

$N$: کل تعداد حالت‌های ممکن $= C^n_m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$

$$\Rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{C_m^n} = \frac{m!\,(n-m)!}{n!}$$

مثال 3 : مثال 2 را در حالتی که ترتیب مهم باشد حل کنید (در مثال توپ ها شماره داشته باشند)

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

$N_A$ : تعداد حالت های مورد نظر $= m!$

$N$ : کل تعداد حالت های ممکن $= P_m^n$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{m!}{P^n_m} = \frac{m!}{\frac{n!}{(n-m)!}} = \frac{m!\,(n-m)!}{n!}$$

مثال 4 : در جعبه‌ای 40 مهره آبی و 60 مهره قرمز داریم. از این جعبه 20 مهره به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم (بدون جایگزینی). احتمال این پیشامد را حساب کنید که از بین این 20 مهره، 15 مهره قرمز و 15 مهره آبی باشند.

$$P(A)=\frac{N_A}{N}=\frac{\binom{40}{10}\binom{60}{10}}{\binom{100}{20}}$$

مثال ۵ : اگر در مثال 4، ترتیب توپ ها مهم باشد (مثلاً توپ ها شماره داشته باشند) احتمال پیش آمد را حساب کنید.

$$P(A)=\frac{N_A}{N}=\frac{20!\binom{40}{10}\binom{60}{10}}{P^{100}_{20}}$$

$P^{40}_{10}$ $P^{60}_{10}$ $\frac{40!}{30!}$ $\frac{60!}{50!}$

$1, \dots, 10$ , $41, \dots, 50$

$10, \dots, 1$ , $50, \dots, 41$

$20! \binom{40}{10} \binom{60}{10}$

$20! \frac{40!}{10!\,30!} \frac{60!}{10!\,50!}$

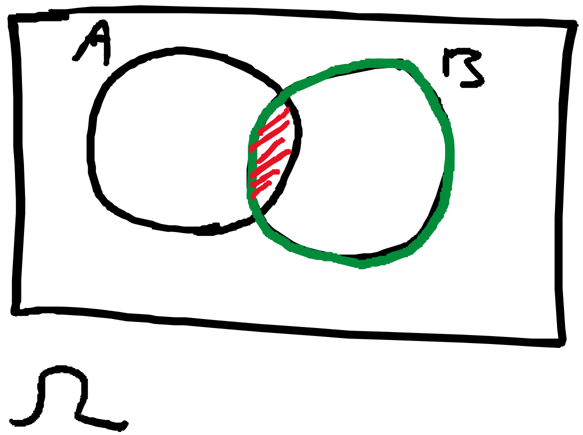
در ادامه می‌خواهیم با مفهوم احتمال شرطی آشنا بشویم.

* احتمال شرطی $P(A|B)$

احتمال شرطی $P(A|B)$ نشان دهنده‌ی احتمال پیش آمد A است، به شرط آنکه بدانیم پیش آمد B حتماً رخ داده است. در واقع در این حالت رخداد پیش آمد B قطعی است.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{N_{A\cap B}}{N_B}$$




به عبارت دیگر، مثل این است که فضای نمونه به پیشامد B نرمالیزه شده است. چون می‌دانیم که پیشامد B حتماً رخ داده است.

بدین ترتیب یک تابع احتمال شرطی $P(A|B)$ تعریف کرده‌ایم که در ادامه نشان می‌دهیم، سه اصل اساسی تابع احتمال برای تابع احتمال شرطی برقرار است و می‌تواند یک تابع احتمال باشد.

$$1)\quad \forall A\,,\quad P(A|B) \geq 0$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)^{\geq 0}}{P(B)_{>0}} \quad \Longrightarrow \quad P(A|B) \geq 0$$

2) $P(\Omega \mid B) = 1$

$$P(\Omega \mid B) = \frac{P(\overbrace{\Omega \cap B}^{B})}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

3) $A \cap C = \varphi \implies P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B)$

$$P(A \cup C \mid B) = \frac{P((A \cup C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (C \cap B))}{P(B)} \underset{\uparrow}{=}$$

$A \cap B \cap C \cap B = \varphi$

$$\Rightarrow P(A \cup C / B) = \frac{P(A \cap B) + P(C \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(C \cap B)}{P(B)}$$

$A \cap C = \varphi$

$$\Rightarrow P(A \cup C / B) = P(A | B) + P(C | B)$$

به این ترتیب تابع احتمال شرطی $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ یک تابع احتمال

است در نتیجه تمامی خصوصیاتی که برای تابع احتمال برقرار است، به طور

مشابه برای تابع احتمال شرطی نیز برقرار است؛ اشرط را همواره باید در نظر

داشت.

به عنوان مثال تمامی قضیه‌های مطرح شده در مورد تابع احتمال $P(A)$ به طور

مشابهاً برای تابع احتمال شرطی $P(A|B)$ نیز برقرار است.

به عنوان مثال:

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$$

یا

$$P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

با استفاده از تعریف تابع احتمال شرطی می‌توانیم به یک رابطه پرکاربرد در احتمال به نام رابطه‌ی زنجیره‌ای برسیم.

می‌دانیم که

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad (1)$$

به طور مشابه داریم

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \quad (2)$$

$$\overset{①,②}{\Longrightarrow} \quad P(A\cap B) = P(B)\,P(A|B) = P(A)\,P(B|A)$$

ایتطور زنجیره‌ای برای دو پیشامد $A$ ، $B$

* ایطور زنجیره‌ای را می‌توانیم به $n$ پیشامد $A_1$ ، $A_2$ ، … ، و $A_n$ نیز تعمیم دهیم.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_2, A_1) \dots P(A_n|A_{n-1}, \dots, A_1)$$

$$= P(A_n)\, P(A_{n-1}|A_n) \dots P(A_1|A_2, \dots, A_n)$$

یا به اختصار

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \prod_{i=2}^{n} P(A_i|A_{i-1}, \dots, A_1)$$

مثال ۱- یک تاس سالم را پرتاب می کنیم، اگر بدانیم که عدد ظاهر شده یک عدد فرد است، احتمال این پیش آمد را حساب کنید که عدد ظاهر شده کوچکتر از 3 باشد

A : آنکه عدد ظاهر شده کوچکتر از 3 باشد $= \{1,2\}$

B : آنکه عدد ظاهر شده فرد باشد $= \{1,3,5\}$

$$P(A|B) = ?$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

$A\cap B = \{1\}$

تعداد حالت‌های مورد نظر

$$P(A|B) = \frac{N_{A\cap B}}{N_B} = \frac{1}{3}$$

تعداد اعضای فضای نمونه جدید

مثال ۲ - فرض کنیم دیودی داریم که احتمال اینکه بعد از یه زمان $t$ خراب شود، برابر $e^{-\alpha t^2}$ است. اگر بدانیم که این دیود تا زمان $T_0$ سالم بوده است، احتمال این را حساب کنید که در بازه زمانی بین $t_1$ , $t_2$ خراب شود.

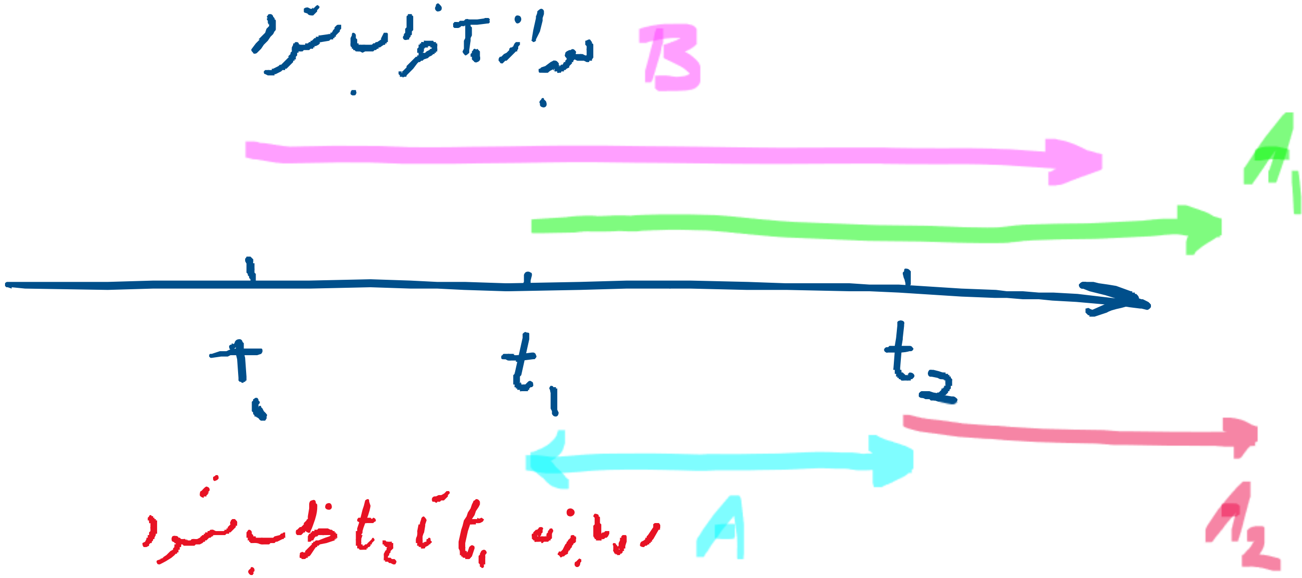
$T_0 < t_1 < t_2$

$$P(A|B) = ?$$

$A$ : اینکه دیود در بازه‌ی زمانی $t_1$ تا $t_2$ خراب شود

$B$ : اینکه دیود تا زمان $T_0$ سالم بوده است. $\equiv$ دیود بعد از زمان $T_0$ خراب شده است

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



$$\Rightarrow P(B) = e^{-\alpha T_0^2}$$

از طرفی دیگر می دانیم که $A \cap B = A$ بنابراین کافی است که $P(A)$ را حساب کنیم.

$$P(A) = P(A_1 - A_2) \underset{A_2 \subseteq A_1}{=} P(A_1) - P(A_2) = e^{-\alpha t_1^2} - e^{-\alpha t_2^2}$$

$$\Rightarrow \quad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$= \frac{e^{-\alpha t_1^2} - e^{-\alpha t_2^2}}{e^{-\alpha t_0^2}}$$